



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$\frac{[x]}{\frac{1}{0,1}} = \frac{\{x\}}{\frac{1}{0,2}} \Rightarrow \frac{[x]}{10} = \frac{\{x\}}{5} \Rightarrow [x] = 2 \cdot \{x\}.$	2p
	<p>Înlocuind în ipoteză, obținem:</p> $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \{x\} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \{x\} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2009} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2010} \Leftrightarrow$ $2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \{x\} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow \{x\} = 0,5$	2p
	<p>Atunci $[x] = 1 \Rightarrow x = 1,5$.</p> $n = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{de 2010 ori}} \Rightarrow n = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow 67 \mid n.$	3p
2.	Presupunem că $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}^*, a^2 + b^2 + 4 = c^2$.	2p
	<p>Din a, b numere naturale impare, fie $a = 2 \cdot k + 1$ și $b = 2 \cdot p + 1, k, p \in \mathbb{N}$.</p> <p>Atunci, $a^2 + b^2 + 4 = 2 \cdot \left[2 \cdot (k^2 + k + p^2 + p + 1) + 1 \right] \quad (1).$</p> <p>Folosind (1), rezultă că 2 divide pe $c^2 \Rightarrow 2$ divide pe c și deci $c^2 = 4 \cdot d^2, d \in \mathbb{N}^*$.</p>	2p
	<p>Înlocuind în (1), obținem</p> $2d^2 = 2(k^2 + k + p^2 + p + 1) + 1, \text{ adică un număr par egal cu un număr impar (contradicție!)}$ <p>Deci $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \notin \mathbb{Q}$.</p>	3p

3.	<p>a) $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2 \Leftrightarrow (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \geq a \cdot b \cdot (a+b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a+b) \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot (a-b)^2 \geq 0, \text{ adevarat.}$</p>	3p
	<p>b) Conform punctului a), avem: $a^3 + 1 \geq a^2 + a;$ $a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a^2 \cdot b^2 + a \cdot b;$ $a^3 + a^3 \cdot b^3 = a^3 \cdot (1 + b^3) \geq a^3 \cdot (b + b^2) = a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2.$</p>	2p
	Adunând membru cu membru inegalitățile de mai sus, obținem relația din enu	2p
4.	<p>Construim $QS \parallel EB, S \in AB$. Conform teoremei lui Thales, rezultă că $\frac{AS}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{AS}{AB} = \frac{1}{3},$ de unde rezultă că $AS = \frac{a}{3}, SB = \frac{2 \cdot a}{3} = DN,$ de unde rezultă că patrulaterul $DNBS$ este paralelogram, deci $DS \parallel NB,$ adică punctele D, Q, S sunt coliniare.</p>	3p
	<p>Din $\triangle ASD \equiv \triangle BMA \Rightarrow m(\angle ADS) = m(\angle BAM) = 90^\circ - m(\angle DAQ),$ de unde rezultă că triunghiul AQD este dreptunghic în $Q,$ deci $AQ \perp DS.$</p>	2p
	<p>Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $PQ \perp$ $m[\angle((PDQ), (ABC))] = m(\angle PQA) = 60^\circ$ și deci $tg(\angle PQA) = \frac{AP}{AQ} = \sqrt{3}.$ $\triangle AQS \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AS}{AM} \Rightarrow AQ = \frac{a \cdot \sqrt{10}}{10} \Rightarrow AP = AQ \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot \sqrt{30}}{10}.$</p>	2p